Einführung in die Logik - 3

Aussagenlogik: Der Kalkül des Natürlichen Schließens

Schlüsse

- *Derjenige, der den Mord begangen hat, ist durch das Gartenfenster geflohen.*
- *Jeder, der durch das Gartenfenster geflohen ist, muss Schmutz an seinen Schuhen haben.*
- *Angenommen, der Butler hat den Mord begangen.*
- *Dann wäre der Butler durch das Gartenfenster geflohen.*
- *In diesem Fall hätte der Butler Schmutz an seinen Schuhen.*
  - ➢ ALSO: *Wenn der Butler den Mord begangen hat, hat er Schmutz an seinen Schuhen.*

die 'Butler'-Beispiele sind angelehnt an:
McCawley, James D. (1981): Everything that Linguists have Always Wanted to Know About Logic (but were Ashamed to Ask). Chicago: University of Chicago Press.

Schlüsse

- *Derjenige, der den Mord begangen hat, ist durch das Gartenfenster geflohen.*
- *Jeder, der durch das Gartenfenster geflohen ist, muss Schmutz an seinen Schuhen haben.*
- *Angenommen, der Butler hat den Mord begangen.*
- *Dann wäre der Butler durch das Gartenfenster geflohen.*
- *In diesem Fall hätte der Butler Schmutz an seinen Schuhen.*
  - ➢ ALSO: *Wenn der Butler den Mord begangen hat, hat er Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Der Butler hat keinen Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Wenn der Butler den Mord begangen hat, ist er durch das Gartenfenster geflohen.*
- *Wenn der Butler durch das Gartenfenster geflohen ist, hat er Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Angenommen, der Butler hat den Mord begangen.*
- *Dann wäre der Butler durch das Gartenfenster geflohen.*
- *In diesem Fall hätte der Butler Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Der Butler hat aber keinen Schmutz an seinen Schuhen.*
  - ➢ ALSO*: Der Butler hat den Mord nicht begangen.*

  ❖ **Anwendung von Schlussregeln**

Der Kalkül des natürlichen Schließens (KNS)

nach Gerhard Gentzen 1934/35

Kalkül:
- ein formales System von Zeichen und Operationen über den Zeichen
  - axiomatische Kalküle
  - Schlussregel-Kalküle

  ➢ Grundlage für automatische
    - ➢ *Ableitung*sverfahren / Deduktionssysteme
    - ➢ *Beweis*verfahren / Theorembeweiser

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - ➢ also: *Elena studiert Kunstgeschichte*
  - ➢ also: *Maria arbeitet in der Bibliothek*

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - ➢ also: *Elena studiert Kunstgeschichte*
  - ➢ also: *Maria arbeitet in der Bibliothek*

	Konjunktionsbeseitigung ($\wedge$B)
	$A \wedge B$ ――――― A

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte*
  - also: *Maria arbeitet in der Bibliothek*

	Konjunktionsbeseitigung (∧B)
	$A \wedge B$ ——— A, B

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte*
  - also: *Maria arbeitet in der Bibliothek*

- *Elena studiert Kunstgeschichte.*
- *Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek*

	Konjunktionsbeseitigung (∧B)
	$A \wedge B$ ——— A, B

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte*
  - also: *Maria arbeitet in der Bibliothek*

- *Elena studiert Kunstgeschichte.*
- *Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek*

Konjunktionseinführung (∧E)	**Konjunktionsbeseitigung (∧B)**
A B	A ∧ B
A ∧ B	A, B

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte*
  - also: *Maria arbeitet in der Bibliothek*

- *Elena studiert Kunstgeschichte.*
- *Maria arbeitet in der Bibliothek.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte und Maria arbeitet in der Bibliothek*

Konjunktionseinführung (∧E)	**Konjunktionsbeseitigung (∧B)**
A B	A ∧ B
A ∧ B, B ∧ A	A, B

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Elena studiert Kunstgeschichte.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte oder Elena studiert CL.*
  - also: *Elena studiert Kunstgeschichte oder Maria geht ins Kino.*

Disjunktionseinführung ($\vee$E)	
A	
A $\vee$ B	

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Wenn Elena ihre Klausur besteht, freut sich der Tutor.*
- *Elena besteht ihre Klausur.*
  - also: *Der Tutor freut sich.*

	Konditionalbeseitigung ($\rightarrow$B)
	A $\rightarrow$ B A
	B

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Wenn Elena ihre Klausur besteht, freut sich der Tutor.*
- *Elena besteht ihre Klausur.*
  - ➢ also: *Der Tutor freut sich.*

▶ klassisch: Modus Ponens

	Konditionalbeseitigung ($\rightarrow$B)
	$A \rightarrow B$ A
	B

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Es ist nicht der Fall, dass Elena ihre Klausur nicht besteht.*
  - ➢ also: *Elena besteht ihre Klausur.*

	Negationsbeseitigung ($\neg$B)
	$\neg \neg A$
	A

Elementare Schlussregeln des KNS - 1

- *Wenn man die Klausur bestanden hat, hat man einen Schein bekommen.*
- *Wenn man einen Schein bekommen hat, hat man die Klausur bestanden.*
  - also: *Man hat dann und nur dann (= genau dann) einen Schein bekommen, wenn man die Klausur bestanden hat.*

- *Man hat dann und nur dann (= genau dann) einen Schein bekommen, wenn man die Klausur bestanden hat..*
  - also: *Wenn man die Klausur bestanden hat, hat man einen Schein bekommen*
  - *also: Wenn man einen Schein bekommen hat, hat man die Klausur bestanden.*

Bikonditionaleinführung (↔E)	**Bikonditionalbeseitigung (↔B)**
A → B B → A ——— A ↔ B	A ↔ B ——— A → B , B → A

Konjunktionseinführung (∧E)	**Konjunktionsbeseitigung (∧B)**
A B ——— A ∧ B, B ∧ A	A ∧ B ——— A, B

Disjunktionseinführung (∨E)	
A ——— A ∨ B	———

	Konditionalbeseitigung (→B)
———	A → B A ——— B

	Negationsbeseitigung (¬B)
———	¬ ¬ A ——— A

Bikonditionaleinführung (↔E)	**Bikonditionalbeseitigung (↔B)**
A → B B → A ——— A ↔ B	A ↔ B ——— A → B , B → A

Elementare Schlussregeln des KNS - 1: Übungen

- $q, \neg p, q \wedge \neg p \rightarrow r$ |- r
- $q \wedge r, r \rightarrow \neg p$ |- $q \wedge \neg p \wedge r$

*zu den **Übungsaufgaben Nr. 3**:*
Bis zu diesem Punkt können nur die Aufgaben unter (1) bearbeitet werden, da alle weiteren Aufgaben die noch fehlenden Schlussregeln Konditionaleinführung, Negationseinführung und Diskunktionsbeseitigung benötigen.

Lust auf weitere Übungen?

Aus den Übungsaufgaben 3.1:

- $\neg\neg p \wedge \neg r, p \leftrightarrow \neg\neg q$ |- $q \wedge \neg r$
- $p \wedge \neg\neg q, p \rightarrow (q \rightarrow r \wedge s)$ |- $s \wedge r$
- $\neg p, \neg\neg q, q \rightarrow \neg\neg r$ |- $(\neg p \vee s) \wedge r$

Elementare Schlussregeln des KNS - 2

- *Derjenige, der den Mord begangen hat, ist durch das Gartenfenster geflohen.*
- *Jeder, der durch das Gartenfenster geflohen ist, muss Schmutz an seinen Schuhen haben.*
- *Angenommen, der Butler hat den Mord begangen.*
- *Dann wäre der Butler durch das Gartenfenster geflohen.*
- *In diesem Fall hätte der Butler Schmutz an seinen Schuhen.*
  - ➢ ALSO: *Wenn der Butler den Mord begangen hat, hat er Schmutz an seinen Schuhen.*

Konditionaleinführung (→E)	**Konditionalbeseitigung (→B)**
A ... B A → B	A → B A B

Elementare Schlussregeln des KNS - 2

- *Der Butler hat keinen Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Wenn der Butler den Mord begangen hat, ist er durch das Gartenfenster geflohen.*
- *Wenn der Butler durch das Gartenfenster geflohen ist, hat er Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Angenommen, der Butler hat den Mord begangen.*
- *Dann wäre der Butler durch das Gartenfenster geflohen.*
- *In diesem Fall hätte der Butler Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Der Butler hat aber keinen Schmutz an seinen Schuhen.*
  - ➢ ALSO*: Der Butler hat den Mord nicht begangen.*

Negationseinführung (¬E)	**Negationsbeseitigung (¬B)**
A ... B ¬ B ¬ A	¬ ¬ A A

Elementare Schlussregeln des KNS - 2: Übung zur ¬E

- *Der Butler hat keinen Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Wenn der Butler den Mord begangen hat, ist er durch das Gartenfenster geflohen.*
- *Wenn der Butler durch das Gartenfenster geflohen ist, hat er Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Angenommen, der Butler hat den Mord begangen.*
- *Dann wäre der Butler durch das Gartenfenster geflohen.*
- *In diesem Fall hätte der Butler Schmutz an seinen Schuhen.*
- *Der Butler hat aber keinen Schmutz an seinen Schuhen.*
  - ➢ ALSO*: Der Butler hat den Mord nicht begangen.*

p - *Der Butler hat den Mord begangen*
q - *Der Butler ist durch das Gartenfenster geflohen*
r - *Der Butler hat Schmutz an seinen Schuhen*

elementare Schlussregeln des KNS - 2: Beispiel für ¬E

p - *Der Butler hat den Mord begangen*
q - *Der Butler ist durch das Gartenfenster geflohen*
r - *Der Butler hat Schmutz an seinen Schuhen*

1	**¬r**		Pr.
2	**p → q**		Pr.
3	**q → r**		Pr.
4		**p**	H.-Pr.
5		**p → q**	wh 2
6		**q**	→B, 4, 5
7		**q → r**	wh 3
8		**r**	→B, 6, 7
9		**¬r**	wh 1
10	**¬p**		¬E, 4, 8, 9

Elementare Schlussregeln des KNS - 2

- *Morgen muss ich entweder nach Stuttgart fahren oder nach Hamburg.*
- *Wenn ich nach Stuttgart fahren muss, komme ich nicht vor 21 Uhr nach Hause.*
- *Da die Probe von 19 bis 21 Uhr stattfindet, kann ich in diesem Fall nicht an der Probe teilnehmen.*
- *Wenn ich nach Hamburg fahren muss, muss ich dort übernachten.*
- *In diesem Fall kann ich also auch nicht an der Probe teilnehmen*
  - ➢ ALSO*: Ich kann morgen in keinem Fall an der Probe teilnehmen*

Disjunktionseinführung ($\vee$E)	**Disjunktionsbeseitigung ($\vee$B)**
A A $\vee$ B ――――――	A $\vee$ B │ A │ C │ B │ C ―――――― C

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Elementare Schlussregeln des KNS - Übersicht 1

Konjunktionseinführung ($\wedge$E)	**Konjunktionsbeseitigung ($\wedge$B)**
A B ―――――― A $\wedge$ B, B $\wedge$ A	A $\wedge$ B ―――――― A, B

Disjunktionseinführung ($\vee$E)	**Disjunktionsbeseitigung ($\vee$B)**
A A $\vee$ B ――――――	A $\vee$ B │ A │ C │ B │ C ―――――― C

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Elementare Schlussregeln des KNS - Übersicht 2

Negationseinführung (¬E)	**Negationsbeseitigung (¬B)**
A ... B ¬ B ¬ A	¬ ¬ A A

Konditionaleinführung (→E)	**Konditionalbeseitigung (→B)**
A ... B A → B	A → B A B

Elementare Schlussregeln des KNS - Übersicht 3

Bikonditionaleinführung (↔E)	**Bikonditionalbeseitigung (↔B)**
A → B B → A A ↔ B	A ↔ B A → B , B → A

Ableitbarkeit

- Der KNS ist ein System von Schlussregeln in Form von Einführungs- und Beseitigungsregeln für alle aussagenlogischen Konnektoren.

➢ **A |- B**
Eine Aussage B ist **ableitbar** aus einer Aussage A gdw. wenn aus der Prämisse A mittels Schlussregeln auf die Konklusion B geschlossen werden kann.

➢ (verallgemeinert:) **A, A‘, ..., A‘‘ |- B**
B ist **ableitbar** aus A, A‘, ..., A‘‘ gdw. wenn aus den Prämissen A, A‘, ..., A‘‘ mittels Schlussregeln auf die Konklusion B geschlossen werden kann.

Ableitbarkeit

- Jede Zeile einer Ableitung darf an späterer Stelle innerhalb derselben Ableitung und in Unterableitungen wiederverwendet (d.h. wiederholt) werden.
- Jede Unterableitung muss abgeschlossen werden. Dies geschieht durch die Anwendung von $\rightarrow$E, $\neg$E oder $\vee$B. Wir sagen dann auch, dass die Prämissen der Unterableitungen durch den Abschluss als Prämissen **beseitigt** sind.
- Die abschließende Konklusion steht nicht mehr unter den Hilfsprämissen der Unterableitung und rückt daher in die übergeordnete Ableitung auf.
- Keine Zeile einer Unterableitung (außer natürlich der abschließenden Konklusion) darf in übergeordneten Ableitungen oder in anderen gleichrangigen Unterableitungen wiederverwendet (wiederholt) werden.

Beweisbarkeit

- **|- B** bzw. **∅ |- B**
  Eine Aussage B ist **beweisbar** gdw. wenn sie **ohne Annahme von nicht beseitigten Prämissen** (d.h. aus der leeren Prämissenmenge) mittels Schlussregeln abgeleitet werden kann.
  - In einem Beweis kann daher lediglich mit (Hilfs-) Prämissen gearbeitet werden, die am Ende restlos durch Anwendung von →E, ¬E und ∨B beseitigt sein müssen.
  - Beispiel: |- ¬ (p ∧ ¬p)

$$\begin{array}{l|l} \varnothing & \\ & \begin{array}{|l} p \wedge \neg p \\ \hline p \\ \neg p \end{array} \\ \neg(p \wedge \neg p) & \end{array}$$

- Beweisbare Aussagen werden ***Theoreme, Gesetze*** oder ***Lehrsätze der Logik*** genannt.

Beweise im KNS: Übungen

- |- (p → q) → ¬(p ∧ ¬q)
- |- ¬p ∨ ¬q → ¬(p ∧ q) [eine Richtung von de Morgan 1]
- |- ¬(p ∨ q) ↔ ¬p ∧ ¬q [de Morgan 2]

Erweiterung des Schlussregel-Inventars: abgeleitete Schlussregeln

- Bestimmte Abfolgen von Schlussregeln treten immer wieder in Ableitungen und Beweisen auf. Diese können als abgeleitete Schlussregeln definiert werden und in Ableitungen und Beweisen wie elementare Schlussregeln verwendet werden.
- Abgeleitete Schlussregeln sind also einfach Abkürzungen für immer wieder auftretende Abfolgen von elementaren Schlussregeln.
- Übersicht über nützliche abgeleitete Schlussregeln: Folien #3b
- Beispiel in De Morgan - 2:

  EC – Ex Contradictione Sequitur Quodlibet:

p
$\neg p$
| $\neg q$
| p
| $\neg p$
$\neg\neg q$
q

Beweise im KNS: Übungen

- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- $\vdash \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$ [eine Richtung von de Morgan 1]
- $\vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ [de Morgan 2]

|- $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

eine Richtung von de Morgan 1 als Beispiel für einen KNS-Beweis mit $\rightarrow$E, $\neg$E und $\vee$B

Beweis = Ableitung aus leerer Prämissenmenge (Zeile 0 ist optional)

0	$\varnothing$		
1	$\neg p \vee \neg q$	HPr	für $\rightarrow$E in (13)
2	$\neg p$	HPr	für $\vee$B auf (1) in (12)
3	$p \wedge q$	HPr	für $\neg$E in (6)
4	p	$\wedge$B: (3)	
5	$\neg p$	wh (2)	
6	$\neg(p \wedge q)$	$\neg$E: (3), (4), (5)	
7	$\neg q$	HPr	für $\vee$B auf (1) in (12)
8	$p \wedge q$	HPr	für $\neg$E in (11)
9	q	$\wedge$B: (8)	
10	$\neg q$	wh (7)	
11	$\neg(p \wedge q)$	$\neg$E: (8), (9), (10)	
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vee$B: (1), (2), (6), (7), (11)	
13	$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$	$\rightarrow$E: (1), (12)	

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

KNS-Beweis des 2. De-Morgan-Gesetzes |- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Beweis Teil 1:

$\neg(p \vee q)$
p
$p \vee q$
$\neg(p \vee q)$
$\neg p$
q
$p \vee q$
$\neg(p \vee q)$
$\neg q$
$\neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$

Beweis Teil 2:

$\neg p \wedge \neg q$
$p \vee q$
p
$\neg p$
q EC
q
q wh
q $\vee$B
$\neg q$
$\neg(p \vee q)$
$\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \vee q)$

Zusammenführung der Teilbeweise:
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Weitere Übungen im KNS

- abgeleitete Schlussregel (s. Folien #3b)
- Ableitungs- und Beweisstrategien im KNS (s. Folien #3c) am Beispiel von

$$p \rightarrow (r \rightarrow q) \quad |\text{-} \quad r \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg(p \rightarrow q) \quad |\text{-} \quad p \wedge \neg q$$

- $|\text{-}\ \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ [de Morgan 1]

Hausaufgaben

- KNS:
  - Ableitungen und Beweise mit elementaren und abgeleiteten Schlussregeln
  - Überblick über die wichtigsten Theoreme

  - speziell die **De-Morgan-Gesetze** und die **Distributivgesetze** sollten Sie gut kennen, da sie einen hohen praktischen Wert haben (z.B. bei der Bildung von *Normalformen*)

- **Der KNS wird ein wichtiger Bestandteil der Klausur**. Nutzen Sie das Angebot von Übungsaufgaben und Tutorium.

- Am 21.12.2015 wird eine ca. 60-minütige *unbenotete* Übungsklausur mit dem gesamten bis dahin erarbeiteten Kursinhalt verteilt.
  - Besprechung der Übungsklausur im anschließenden Tutorium (Januar 2016)